В. Н. Родионов, И. А. Сизов ИДГ РАН.

Динамика медленного оползня

Медленный массоперенос по склонам вызывает локальные напряжения в поверхностных слоях, величина которых достаточна для разрушения горных пород и инициирования быстрых подвижек масс по склону.

Ключевым вопросом медленной динамики является зависимость силы трения от скорости.

В статье предложена физическая модель трения и получено уравнение движения для поверхностного слоя на склоне.

1. Физическая модель трения.

Движение горных масс по склону отличается большим разнообразием. Особого внимания заслуживают медленные смещения поверхностных слоев в период подготовки быстрых сбросов больших масс горной породы. Наблюдения за медленными движениями могут служить основой прогноза развития разрушительных процессов на склонах гор (оползни, лавины).

При медленном движении верхних слоев на склоне сдвигающие гравитационные силы уравновешены силами сцепления в основании слоев. При построении схем равновесия сил на склоне часто используется сила трения.

Эмпирический закон трения Кулона утверждает: сила трения при скольжении тела по жесткой гладкой поверхности пропорциональна силе, прижимающей тело к поверхности, и не зависит от площади скольжения. Простота и удобство пользования этой формулой в механике объективно тормозила исследования сухого трения.

Отсутствие указаний на зависимость силы от скорости скольжения можно объяснить сравнительно небольшим диапазоном изменения скоростей скольжения в экспериментах, что бывает связано с методическими трудностями. Чтобы выйти за рамки этой замечательной эмпирической формулы воспользуемся следующей моделью.

Будем считать, что твердое тело, лежащее на жесткой гладкой плоскости, имеет небольшую площадь силовых контактов (по сравнению с покрываемой этим телом поверхностью). Обозначим площадь контактов s, а отношение ее к покрываемой поверхности $\bar{s}$. Последняя величина зависит от неровностей поверхности тела, лежащего на жесткой плоскости.

Площадь контактов должна зависеть от силы, прижимающей тело к жесткой плоскости.

Будем считать, что контакты многочисленны, а площадь отдельного контакта составляет малую долю общей контактной площади тела. В этом случае можно полагать, что напряжения на всех контактах одинаковы и равны прочности материала тела на сжатие σ^*.

Увеличение прижимающей тело силы F ведет к увеличению контактной площади $F=s\sigma^*$. Это может быть следствием как расширения площади контакта, так и увеличения их числа.

Скольжение тела по жесткой площади будет сопровождаться истиранием, т.е. разрушением материала тела в окрестности контакта и на его площади. Хотя этот процесс может сильно отличаться для разных материалов, сила сопротивления T будет пропорциональна прочности на сдвиг τ^* и площади контактов $T=ks\tau^*$.

Исключая площадь контактов из двух приведенных формул, получим:

$$T = \frac{k\tau^*}{\sigma^*}F$$

Воспроизведя закон кулоновского трения на модели, можно обсудить изменение коэффициента пропорциональности $k\dfrac{\tau^*}{\sigma^*}$ с увеличением размера тела и скорости скольжения. Так по мере возрастания прижимающей силы F площадь контактов может приблизиться к площади тела $\bar{\bar{s}} \approx 1$ и тогда она уже не будет линейно возрастать с прижимной силой. Следствием этого будет независимость силы трения T от F. Заметим, что подобное может произойти и в результате появления жидкой фазы (смазки) на контактной поверхности. Замедление роста контактной площади с увеличением толщины скользящего слоя, когда $\bar{\bar{s}}$ приближается к единице, может истолковываться как снижение силы трения с увеличением размера тела (масштабный эффект). Влияние скорости скольжения на величину силы сопротивления этому движению на контактах с жесткой поверхностью может иметь различную природу

При больших скоростях – это проявление инерции, взаимодействие частей тела. При низких скоростях – это релаксации напряжений сдвига в материале тела. В промежуточной области прочность материала принимается константой, и уравнение равновесия действующих сил поэтому не содержит времени.

Оставим пока без внимания учет упругих волновых движений и рассмотрим динамику медленных движений. Прежде всего напомним, что сила трения проявляет себя при скольжении и равна нулю, если перемещение по поверхности отсутствует. Так тело, помещенное на наклонную плоскость и лежащее на ней неподвижно, требует для своего равновесия включения сил трения. Однако сила трения возникает только в движении, а значит тело на наклонной плоскости должно, хотя и медленно, но ползти. Отметим, что возможные "зацепы" за неровности поверхности здесь не принимаются во внимание как чужеродные трению процессы.

Перемещение по наклонной плоскости тела может происходить и без разрушения материала вблизи отдельных контактов вследствие релаксации сдвигового напряжения в материале тела. При этом сопротивление скольжению будет результатом динамического равновесия двух процессов: нарастания напряжения пропорционально скорости сдвига и релаксации его со скоростью, которая является константой. Динамика этого равновесия рассмотрена, опираясь на модель твердого тела с неоднородностями в статье [1].

Приведем основной результат этого исследования для горных пород. В скользящем по жесткой поверхности теле возникает пограничный слой, определяющий силу сдвига на контактной поверхности. Эта сила пропорциональна скорости скольжения и не зависит от толщины пограничного слоя. При скорости скольжения V^*=6 см/год в объеме пограничного слоя возникают трещины, и происходит дезинтеграция материала. С течением времени зона нарушения сплошности материала сужается и образует поверхность скольжения и начинает действовать закон трения Кулона. До скоростей скольжения $V \le V^*$ напряжение сдвига на контактах может быть представлено в виде линейной зависимости от скорости

$$\tau = k_1 V$$

Для горных пород k_1=1, если τ измерять в кг/см^2, а V в см/год. Или k_1=3·10^{13} дин·с/см^3.

Как следует из этой формулы нарушения сплошности в материале погранслоя начинаются уже при τ = 6 кг/см^2.

Если использовать эту линейную зависимость за пределами ее применимости, оценивая скорости, при которых τ будет соизмеримо с обычной прочностью горных пород, то получим, что $V \approx 1$ м/год.

Эту величину можно рассматривать как нижнюю границу области применимости формулы для кулоновского трения.

2. Уравнение движения для медленно сползающего слоя по наклонной плоскости.

Уравнение движения упругого тяжелого слоя на наклонной плоскости. Обозначим угол наклона плоскости к горизонту через α, а ось x направим вдоль склона. Каждый элемент слоя dx толщиной δ и плотностью ρ будет испытывать на себе действие силы тяжести, одна из составляющей которой прижимает слой к плоскости, а другая сдвигает его по склону. На площади контактов слоя с плоскостью при скольжении возникает сила сопротивления, которая пропорциональна скорости движения.

Сжатие и растяжение слоя при скольжении по склону вызывает упругие напряжения, так что на каждый элемент будет действовать сила, пропорциональная толщине слоя и градиенту напряжений. Силой инерции при скольжении можно пренебречь.

Равновесие всех действующих сил при скольжении слоя дается уравнением:

$$\rho g\delta Sin\alpha = -\,\delta\,\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \bar{s}\tau\,, \quad \text{где} \quad \bar{s} = \rho g\delta Cos\alpha/\sigma*\,, \quad V = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \sigma = E\frac{\partial u}{\partial x}$$

После подстановки в уравнение $\bar{s}$, σ, V и сокращения общих множителей получим:

$$\rho gSin\alpha = -E\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho gCos\alpha}{\sigma^*}\,k_1\frac{\partial u}{\partial t}\,.$$

Введем вспомогательную функцию $v = u - ct$ и выберем c так, чтобы в уравнении левая часть равнялась нулю.

$$\frac{\rho g Cos\alpha}{\sigma^*} k_1 \frac{\partial v}{\partial t} - E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \qquad \text{при этом} \qquad c = \frac{Sin\alpha}{Cos\alpha} \frac{\sigma^*}{k_1}$$

После преобразования получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \qquad \text{где} \quad a^2 = \frac{E\sigma^*}{\rho g k_1 Cos\alpha}$$

Решение этого уравнения подробно исследовалось в задачах по теплопроводности, где функция $v(x,t)$ представляла температуру тела. Это обстоятельство может помочь при качественном анализе задач о скольжении тяжелого упругого тела по склону. Смещение по склону $u(x,t)$ находится простым добавлением к вспомогательной функции $v(x,t)$ слагаемого ct:

$$u(x,t) = v(x,t) + ct$$

Сама же вспомогательная функция $v(x,t)$ представляет собой отклонение смещения в данной точке от того смещения, которое было бы в отсутствие напряжений в слое.

Если на границе $x = 0$ задано простейшее условие $v(0,t) = \mu$ для $t > t_0$, то решение уравнения $\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ примет вид (интеграл ошибок):

$$v(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mu \int_{\beta}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta, \qquad \text{где} \quad \beta = \frac{x}{2\sqrt{a^2(t - t_0)}}$$

Значения интеграла ошибок от аргумента β приведены в справочниках.

3. Приближенное решение задачи о напряженном состоянии вблизи препятствия.

Опираясь на приведенное выше решение, можно построить приближенное решение для случая, когда граничное условие при $t > t_0$ имеет вид $v(0,t) = \omega(t - t_0)$.

Разделим время действия граничного условия на равные интервалы $\Delta t = (t - t_i)/n$ и обозначим границы интервала t_i, где $i = 0,1,2...n-1$. Будем считать, что внутри каждого интервала функция остается постоянной, возрастая скачком на границе t_i.

$$v(0, t - t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\omega}{n}(t - t_i)$$

Эта ступенчатая функция заменяет $v(0, t - t_0) = \omega(t - t_0)$.Теперь решение уравнения с этим граничным условием можно представить как сумму:

$$v(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (t - t_i) \int_{\beta}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta .$$

Определим, как изменяется со временем $\frac{\partial v}{\partial x}$ вблизи $x = 0$, где $e^{\beta^2} = 1$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (t - t_i) \frac{1}{2\sqrt{a^2 (t - t_i)}}$$

Подставляя $t - t_i = \frac{t - t_0}{n}(n - i)$ и соответствующим образом преобразуя, получаем:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\omega \sqrt{t - t_0}}{na\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{n-i}{n}}$$

Как видно, производная $\frac{\partial v}{\partial x}$ вблизи границы растет $\sim \sqrt{t}$.

Общим свойством решений, описываемых с помощью интеграла ошибок, является непрерывная трансформация $v(x)$ со временем, т.к. фиксированное значение $v(\beta_*)$ будет перемещаться в пространстве

$$x = \beta_* \; 2\sqrt{a^2(t - t_0)} \; .$$

Отсюда следует, что в решениях с граничными условиями максимальные значения производных ($\frac{\partial v}{\partial x}$) будут вблизи границ.

Рассмотрим теперь исходную функцию $u(x,t) = v(x,t) + ct$. В отсутствие возмущающего действия граничного условия функция $v(x,t) \equiv 0$ и смещение по всему склону происходит с постоянной $\frac{\partial u}{\partial t} = c$. Таким образом, $v(x,t)$ представляет собой отличие смещений в слое по склону во времени, обусловленное ненулевыми граничными и начальными условиями.

В этом случае, когда $v(0,t) = \mu$, для $t > t_0$ $u(0,t) = \mu + c(t - t_0)$. Это значит, что сечение x=0 смещено на величину μ за счет сжатия малого по протяженности (δx) упругого объема. Со временем упругие напряжения уменьшаются, а возмущение $v(x,t)$ распространится по всему слою.

В данном решении $v(x,t)$ изменяется точно так же, как температура в холодном металлическом стержне при поддержании на торце постоянной температуры. Решение уравнения с граничным условием $v(0,t) = \omega(t - t_0)$

$$u(0,t) = \omega(t - t_0) + c(t - t_0)$$

определяет возмущенное движение слоя по склону, обусловленное изменением скорости скольжения на границе x=0. Если $\omega = -c$ смещение слоя в сечении x=0 остановлено в момент $t=t_0$.

Как было показано, у границы со временем нарастает деформация $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ и напряжение $\sigma = E\frac{\partial u}{\partial x}$.

Нарастание напряжения будет происходить до тех пор, пока не прекратится скольжение по всей длине. Если закреплена верхняя граница слоя, около нее возникнут растягивающие напряжения, которые приведут к разрыву слоя. Если закреплен слой у подошвы склона, то сжимающие напряжения на большой длине могут привести к потере устойчивости и возникнут надвиги, что равносильно его разрушению.

Проведем для ориентировки анализ ситуации на стадии медленного движения используя известные численные значения с и a^2. Если слой представлен горной породой ρ=2 г/см^3; E=10^5 кг/см^2; σ^*=100 кг/см^2 и склон близок к углу естественного откоса, то вычисленные по приведенным выше формулам значения будут равны: с≅1,5 10^{-6} см/с и $a^2 = 150$ см^2/с.

В таком слое изменение напряженного состояния на склоне длиной ~1км может произойти за время t_*, составляющее по порядку величины :

$$t_* = \frac{x^2}{a^2} = 10^{10}/150 \cong 6\ 10^7 \text{ с} \cong 2 \text{года}.$$

4. Заключение.

Представленная модель скольжения слоя по склону, а также уравнение движения этого слоя позволяет по-новому взглянуть на проблему регулирования склоновых процессов. Представляется важным сосредоточить внимание на изучение динамики медленных движений в период скрытой подготовки разрушительных процессов.

Литература

1.*Садовский М.А., Родионов В.Н., Сизов И.А.* Критерии подобия и дезинтеграции медленно деформируемых твердых тел. ДАН, 1995, т. 341, № 5, С. 686-688.

Авторский комментарий.

Динамика медленного оползня-пример учета медленного движения при рассмотрении задачи об устойчивости склона. Отказ от статического равновесия принципиально важен.

Напомним основные положения геомеханики, трактующие зависимость механических свойств твердых тел от самого деформационного процесса. Присутствие в сплошной среде неоднородностей, на которых релаксируют напряжения сдвига, приводит к зависимости механических свойств от скорости деформации. Подобие поведения двух тел, отличающихся только размером, достигается лишь тогда, когда скорости их деформирования будут обратно пропорциональны их размерам. Как следствие отсюда вытекает, что критерий дезинтеграции твердого тела выражается величиной скорости смещения границ тела, независимо от его размеров.

Изучение природных тел в земной коре показало, что они заселены неоднородностями разного размера (L) и число их (N) в единичном объеме подчиняется закону:

$$\frac{L^3 dN}{d \ln L} = Const ,$$

т.е. суммарный объем неоднородностей каждого размера (измеряемых в логарифмическом масштабе) одинаков.

В каждом конкретном деформационном процессе активную роль играет лишь небольшая часть неоднородностей, размер которых отбирает скорость процесса. Эта взаимосвязь свойств и скорости процесса оставляет свободу выбора структурных форм для отдельного природного объекта. Такие объекты могут неограниченно деформироваться без потери сплошности или формировать блочную структуру иерархического строения.

В этом комментарии авторы попытались пояснить значимость новой концепции для естествознания.